SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

2. MECHANIKA-VÉGESELEM MÓDSZER ELŐADÁS
(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

II. előadás

2. Közelítő megoldások, energiaelvek:

Összetett rugalmas peremérték feladat esetén csak közelítő megoldással tudunk szolgálni, amely közelítő megoldással szemben elvárásokat fogalmazhatunk meg, az elmozdulás és a feszültség vonatkozásában is.

A rugalmasságtani probléma közelítő megoldását az elmozdulások vagy erők (feszültségek) közelítésével oldhatjuk meg. A rugalmasságtani egyenletek segítségével mindkét irányból elindulva a test elmozdulás-, alakváltozási és feszültségmezője előállítható.

Kinematikailag lehetséges elmozdulás mező: az az $u^*(x)$ elmozdulás mező, amely folytonos, elegendően sokszor differenciálható (a függvény deriváltja nullától különbözik) és kielégíti a kinematikai peremfeltételt. Ezen definíció alapján az első feladatra teljesülnie kell az alábbi egyenletnek:

$$\varepsilon^*(x) = \frac{du^*}{dx},\ u^*(0) = 0$$

(Bizonyos feltételek teljesülése esetén a kinematikailag lehetséges elmozdulás mező megegyezik a tényleges megoldással).
A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőből előállítható a kinematikailag lehetséges alakváltozási mező. Az alakváltozási mezőből az anyagegyenlet segítségével előállítható a kinematikailag lehetséges feszültségmező.

Statikailag lehetséges feszültség mező: az a feszültség mező, amely kielégíti az egyensúlyi egyenletet $\left(\frac{dN(x)}{dx} = -f_x\right)$ és a dinamikai peremfeltételt. Ezen definíció alapján a feszültségi mezőnek, azaz az $\overline{N}$ rúderőnek ki kell elégítenie a következő két egyenletet:

$$\frac{dN(x)}{dx} + f_x = 0,\ \overline{N}(l) = F_x$$

Előállítható belőle a statikailag lehetséges alakváltozási mező az anyagegyenlet segítségével.

Rugalmas peremérték feladat megoldási módszerei:

Kétféle közelítő eljárást különböztetünk meg:

- **Elmozdulási módszer:** olyan közelítő megoldást előállító módszer, amelyben az elsődleges ismeretlen mező a kinematikailag lehetséges elmozdulás mező.
- **Erő módszer:** olyan közelítő megoldást előállító módszer, amelyben az elsődleges ismeretlen mező a statikailag lehetséges feszültség mező.

Jelen tantárgy keretében az elmozdulási módszerrel foglalkozunk. A közelítő megoldás előállításához olyan elvre van szükségünk, amely egy adott függvénytérből a lehető legjobb közelítéssel szolgál a megoldás vonatkozásában. A bemutatásra kerülő két elv a vizsgált tartományon értelmezett azaz integrál értelmű megfogalmazást alkalmaz.

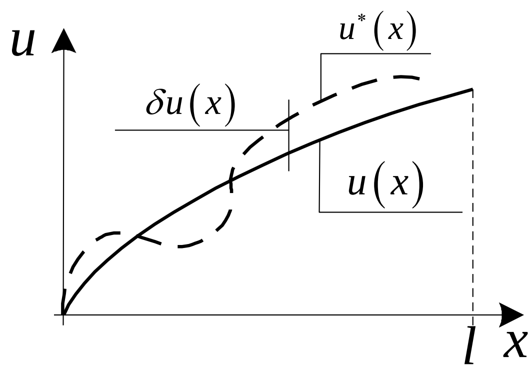
Ezen két elv a virtuális munka elv variációs alakja és a potenciális energia minimum elv.

2.1. A virtuális munka elvének variációs alakja egydimenziós esetben

Virtuális elmozdulás: kényszerek által megengedett kismértékű, tetszőleges elmozdulás.
A virtuális munka elv származtatása az első feladatra szükségessé teszi két további definíciónak a feladatunknak megfelelő megfogalmazását:

- **Virtuális elmozdulás mező:** két különböző kinematikailag lehetséges elmozdulás mező különbségét virtuális elmozdulás mezőnek nevezzük.
  Röviden: $\delta u(x) = u_1^*(x) - u_2^*(x)$
  Tulajdonságai: folytonos,
  elegendően sokszor differenciálható,
  kinematikai peremen értéke nulla.
- **Elmozdulás mező variációja**: a tényleges elmozdulásmező és annak elég kis környezetében levő kinematikailag lehetséges elmozdulásmező különbsége. A virtuális elmozdulással megegyező módon $\delta u(x)$ -val jelöljük.
  Röviden: $\delta u(x) = u^*(x) - u(x)$
  Tulajdonságai: folytonos,
  elegendően sokszor differenciálható,
  kinematikai peremen értéke nulla.

Megjegyzés: a virtuális elmozdulás mező és az elmozdulás variációja megegyezik, ha a tényleges mező közvetlen környezetében a tényleges elmozdulás mezőre vonatkozó virtuális elmozdulás mező elegendően kicsiny.



1. ábra: Az elmozdulás mező variációja

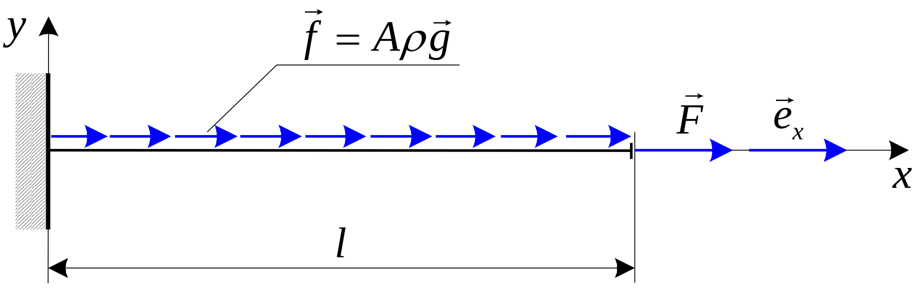
Elmozdulás mező variációja és a virtuális elmozdulás mező is rendelkeznek a már fent említett tulajdonságokkal, azaz:

- **folytonos,**
- **elegendően sokszor differenciálható,**
- **kinematikai peremen értéke nulla.**

Vagyis fennállnak a következő összefüggések:

$$\delta\varepsilon_x = \frac{d(\delta u)}{dx}, \ \delta u(0) = 0$$

A virtuális munka elv variációs alakjának levezetése 1D-s esetben:



2. ábra: Húzott-nyomott prizmatikus rúdfeladat egy dimenziós modellje

Szorozzuk meg az egyensúlyi egyenletet δu virtuális elmozdulás mezővel és integráljuk 0-tól l-ig.

$$\frac{dN(x)}{dx} + f_x = 0 \qquad / \, \delta u(x)$$

$$\left(\frac{dN(x)}{dx} + f_x\right)\delta u(x) = 0 \qquad / \int_0^l \ldots \, dx$$

$$\underbrace{\int_0^l \frac{dN(x)}{dx}\delta u(x)\,dx}_{\int_0^l v' u \, dx} + \int_0^l f_x \delta u(x)\,dx = 0$$

Parciális integrálás: $\left.\begin{aligned} u &= \delta u, \\ u' &= \frac{d(\delta u)}{dx}, \\ v &= N, \\ v' &= \frac{dN}{dx} \end{aligned}\right\}$ Felhasználva a jobb oldalon álló első tag:

$$\int_0^l (uv)' \, dx = \int_0^l u'v dx + \int_0^l uv' dx$$

$$[uv]_0^l = \int_0^l u'v dx + \int_0^l uv' dx \Rightarrow \int_0^l uv' dx = [uv]_0^l - \int_0^l u'v dx = \delta u N\big|_0^l - \int_0^l \frac{d\delta u}{dx} N \, dx$$

Visszahelyettesítve , az egyenlet az alábbi alakú:

$$\delta u N\big|_0^l - \int_0^l \frac{d\delta u}{dx} N \, dx + \int_0^l \delta u f_x \, dx = 0$$

Figyelembe véve a peremfeltételeket, azaz

$\delta u(0) = 0$,

$\delta u(l) = \delta u_l$,

$N(l) = F_x$,

átrendezés után:

$$\underbrace{N(l)}_{=F_x}\underbrace{\delta u(l)}_{=\delta u_l}-\underbrace{N(0)}_{=0}\underbrace{\delta u(0)}_{=0}-\int_0^l \frac{d\delta u}{dx} N\,dx+\int_0^l \delta u f_x\,dx=0$$

megkapjuk a virtuális munka elv variációs alakját:

$$F_x\delta u_l+\int_0^l \delta u f_x\,dx=\int_0^l \frac{d\delta u}{dx} N\,dx$$

- **A tényleges megoldásnál a belső erők virtuális munkája megegyezik a külső erők virtuális munkájával.**
- **Tényleges megoldás esetén teljesülnek azon feltételek, amelyekkel az elmozdulásmező variációja és a virtuális elmozdulásmező is rendelkeznek.**

Rugalmas peremérték feladat gyenge alakjának levezetése:

Szorozzuk meg az egyensúlyi egyenletet δu virtuális elmozdulás mezővel és integráljuk 0-tól l-ig.

$$\frac{dN(x)}{dx} + f_x = 0 \qquad / \, \delta u(x)$$

$$\left(\frac{dN(x)}{dx} + f_x \right) \delta u(x) = 0 \qquad / \int_0^l \dots \, dx$$

$$\int_0^l \frac{dN(x)}{dx} \delta u(x) \, dx + \int_0^l f_x \delta u(x) \, dx = 0$$

Megjegyzés:

Parciális integrálás: deriválatlan mennyiségek szorzatából kivonjuk a kiszámított mennyiségek szorzatának integrálját, ahol:

$$\left. \begin{aligned} & u = \delta u, \\ & u' = \frac{d(\delta u)}{dx}, \\ & v = N, \\ & v' = \frac{dN}{dx} \end{aligned} \right\} \text{Felhasználva az egyenlet:}$$

$$\delta u N \big|_0^l - \int_0^l \frac{d\delta u}{dx} N \, dx + \int_0^l \delta u f_x \, dx = 0$$

Figyelembe véve a peremfeltételeket, azaz

$\delta u(0) = 0$,

$\delta u(l) = \delta u_l$,

$N(l) = F_x$,

átrendezés után:

$$\underbrace{N(l)}_{=F_x} \underbrace{\delta u(l)}_{=\delta u_l} - \underbrace{N(0)}_{=0} \underbrace{\delta u(0)}_{=0} - \int_0^l \frac{d\delta u}{dx} N \, dx + \int_0^l \delta u f_x \, dx = 0$$

megkapjuk a virtuális munka elv variációs alakját:

$$F_x \delta u_l + \int_0^l \delta u f_x \, dx = \int_0^l \frac{d\delta u}{dx} N \, dx$$

Ez utóbbi egyenletbe az anyagtörvényt $N = A \cdot E \cdot \varepsilon_x = A \cdot E \frac{du(x)}{dx}$ behelyettesítve a rugalmas peremérték feladat gyenge alakját nyerjük:

$$F_x \delta u_l + \int_0^l \delta u f_x \, dx = \int_0^l \frac{d\delta u}{dx} A \cdot E \frac{du(x)}{dx} dx$$

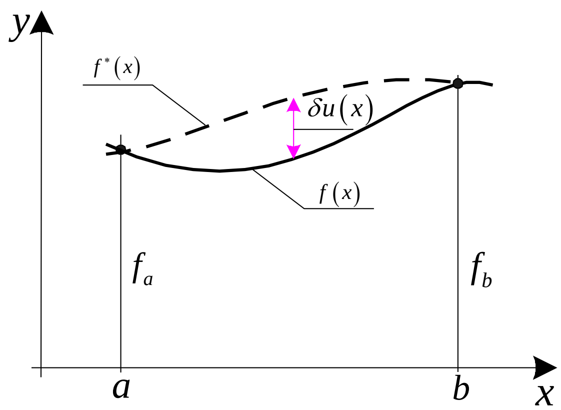
Ezen egyenlet igen fontos az elmozdulásra alapozott közelítő megoldások, így a végeselemes megoldások előállítása szempontjából.

A gyenge alakra alapozott közelítő megoldás tulajdonságai:

- az elmozdulás mezőnek kinematikailag lehetségesnek kell lennie,
- a kapott megoldás integrál értelemben kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

Matematikai kitérő, Variációszámítás alapgondolata:

$\delta f(x)$ az $f(x)$ függvény variációja, azaz $\delta f(x)$ eltérés az $f(x)$ függvénytől.
Tekintsük a következő függvényt, illetve annak variációját.



$\delta f(x)\big|_{x=a} = \delta f(x)\big|_{x=b} = 0$
($x = a, x = b$ helyen nincs eltérés)

Funkcionál: olyan leképezés, amelynél

- a $J(f)$ (funkcionál) értelmezési tartománya az $f(x)$ függvények halmaza,
- a $J(f)$ értékkészlete a valós számok halmaza.

Funkcionál: $J[f] = \int\limits_{x=a}^{b} F(x, f, f')dx$, ahol $F(x, f, f')$ adott ismert kifejezés.

Funkcionál variációja: $J[f]$ funkcionálban levő $f(x)$ függvény helyére helyettesítsük be: $f(x)+\alpha\delta f(x)$ függvényt, ahol α valós paraméter. Így α különböző értékeire különböző a J funkcionálba helyettesített függvényeket kapunk.

Fejtsük Taylor-sorba a $J\left[f(x)+\alpha\delta f(x)\right]$ funkcionált az $f(x)$ körül úgy, mintha az $f(x)$ egy változó lenne, az $\alpha\delta f(x)$ pedig $f(x)$ egy kis megváltozása, ahol $\delta f(x)$ konstans:

$$J[f+\alpha\delta f] = J[f+\alpha\delta f]\big\|_{\alpha=0} + \frac{d}{d\alpha}J[f+\alpha\delta f]\big\|_{\alpha=0}\alpha + \frac{d^2}{d^2\alpha}J[f+\alpha\delta f]\big\|_{\alpha=0}\alpha^2 + ...,$$

A sorfejtésben szereplő tagokat/deriváltakat szokás n-ed rendű vagy Gateaux-féle iránymenti deriváltaknak is nevezni.

Jele: $D^n J[f+\alpha\delta f] = \frac{d^n}{d\alpha^n}J[f+\alpha\delta f]\big\|_{\alpha=0}$

A $J[f]$ funkcionál elsőrendű Gateaux-féle deriváltját a funkcionál δf szerinti első variációjának nevezzük.

$$DJ[f,\alpha\delta f] = \frac{d}{d\alpha}J[f+\alpha\delta f]\big\|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{J[f+\alpha\delta f]-J[f]}{\alpha}$$

A második variáció Gateaux szerinti értelmezése:

$$D^2 J[f, \alpha\delta f] = \frac{d^2}{d\alpha^2} J[f + \alpha\delta f]\Big|_{\alpha=0}$$

Cél: a funkcionál szélsőértékét keressük.
(Az egzakt megoldástól lehetséges legkisebb eltérést keressük, azaz ahol a funkcionálnak minimuma lesz.)

Peremfeltételek: $f(x=a) = f_a$, $f(x=b) = f_b$ (ezek a mi esetünkben/rugalmasságtani peremérték feladat megoldásánál dinamikai peremfeltételeknek felelnek meg).

Feladat: az $f(x)$ függvényhalmazból annak az $f_0(x)$ függvénynek a megkeresése, amelyre $J[F]$ funkcionál szélsőértéket ad.

Megoldás:

Variációszámítás szerint a funkcionálok szélsőértékének feltételei:

- $\delta J = 0$,
- minimum esetén $\delta^2 J > 0$,
- maximum esetén $\delta^2 J < 0$.

A variációt formálisan a deriváláshoz hasonlóan kell képezni, de

- a variáció nem hely, hanem különböző paraméterek szerint differenciál,
- a variáció/változtatás során a peremfeltételt mindig ki kell elégíteni.

Például az elmozdulás mező

- differenciálja: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$,
- variációja: $\delta u = \frac{\partial u}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial u}{\partial c_2} \delta c_2 + \dots$

Az $f(x)$ függvény

- differenciálja: $df = \frac{df}{dx} dx$,
- variációja: $\delta f = \frac{\partial f}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial f}{\partial c_2} \delta c_2 + \dots$